I) Sea $V = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, probamos los 8 supuestos de los espacios vectoriales

a. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$

i) $(a,b) + (c,d) = (ac, bd) = (ca, db) = (c,d) + (a,b)$ (VERDADERO)

ii) $(a,b) + (c,d) = (a+d, b+c) = (d+a, c+b) = \underline{(d,c)} + (a,b)$ (FALSO)

iii) $(a,b) + (c,d) = (ac, bd) = (ca, db) = (c,d) + (a,b)$ (VERDADERO)

iv) $(a,b) + (c,d) = (0,0)$ $\wedge$ $(c,d) + (a,b) = (0,0)$ (VERDADERO)

v) $(a,b) + (c,d) = (ac, bd) = (ca, db) = (c,d) + (a,b)$ (VERDADERO)

vi) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b)$ (VERDADERO)

b. $(x+y) + z = x + (y+z)$, $\forall x, y, z \in V$

i) $[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (ac, bd) + (e,f) = (ace, bdf)$ (VERDADERO)

$= (a(ce), b(df)) = (a,b) + (ce, df) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)]$

ii) $[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a+d, b+c) + (e,f) = (a+d+f, b+c+e)$ (FALSO)

$(a,b) + [(c,d) + (e,f)] = (a,b) + (c+f, d+e) = (a+d+e, b+c+f)$ $\neq$

iii) $[(a,b) + (c,d)] + (e,f)$ ... similar a i)   (VERDADERO)

iv) $[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (0,0) + (e,f) = (0,0)$ (VERDADERO)

$(a,b) + [(c,d) + (e,f)] = (a,b) + (0,0) = (0,0)$ $\Big\} =$ (VERDADERO)

v) similar a i)

vi) $[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a+c, b+d) + (e,f) = (a+c+e, b+d+f)$ $\Big\} =$ (VERDADERO)

$(a,b) + [(c,d) + (e,f)] = (a,b) + (c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)$

c. $\exists! \, 0 \in V : x + 0 = x$, $\forall x \in V$

i) $(a,b) + (0_1, 0_2) = (a0_1, b0_2) = (a,b) \rightarrow 0_1 = 0_2 = 1 \rightarrow 0 = (1,1) \in V$ (VERDADERO)

ii) $(a,b) + (0_1, 0_2) = (a+0_2, b+0_1) = (a,b) \rightarrow 0_1 = 0_2 = 0 \rightarrow 0 = (0,0) \in V$ (VERDADERO)

iii) ... similar a i)   (VERDADERO)

iv) $(a,b) + (0_1, 0_2) = (0,0) = (a,b) \rightarrow \nexists \, 0_1, 0_2 \in \mathbb{R}$ (FALSO)

v) ... similar a i)   (VERDADERO)

vi) $(a,b) + (0_1, 0_2) = (a+0_1, b+0_2) = (a,b) \rightarrow a = a_2 = 0 \rightarrow 0 = (0,0) \in V$ (VERDADERO)

d. $\forall x \in V, \exists x' \in V : x + x' = 0$

i) $(a,b) + (a', b') = (aa', bb') = (0,0) \rightarrow a' = b' = 0$ → $(a', b') = (0,0) \in V$ (VERDADERO)

ii) $(a,b) + (a', b') = (a+b', b+a') = (0,0) \rightarrow b' = -a, a' = -b \rightarrow (a', b') = (-b, -a) \in V$ (VERDADERO)   (VERDADERO)

iii) ... similar a i)

iv) $(a,b) + (a', b') = (0,0) = (0,0) \rightarrow a', b' \in \mathbb{R} \rightarrow (a', b') \in V$ (VERDADERO)   (VERDADERO)

v) ... similar a i)   (VERDADERO)

vi) $(a,b) + (a', b') = (a+a', b+b') = (0,0) \rightarrow a' = -a, b' = -b \rightarrow (a', b') = (-a, -b) \in V$ (VERDADERO)

$\underline{e.}\ 1x = x\ ,\ \forall x \in V$

i) $L(a,b) = (1a,b) = (a,b)$ (VERDADERO)

ii) $L(a,b) = (1a,1b) = (a,b)$ (VERDADERO)

iii) $L(a,b) = (1\cdot a, 1\cdot b) = (a,b)$ (VERDADERO)

iv) ... similar a ii)   (VERDADERO)

v) ... similar a iii)   (VERDADERO)

vi) $1(a,b) = (1\cdot a, 0) = (a,0) \neq (a,b)$ (FALSO)

$\underline{f.}\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x\ ,\ \forall x \in V \wedge \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

i) $\alpha[\beta(a,b)] = ((\alpha\beta)a, b) = (\alpha\beta)(a,b)$ (VERDADERO)

ii), iii)
iv), v) $\alpha[\beta(a,b)] = \alpha(\beta a, \beta b) = (\alpha\beta a, \alpha\beta b) = (\alpha\beta)(a,b)$ (VERDADERO)

vi) $\alpha[\beta(a,b)] = \alpha(\beta a, 0) = (\alpha\beta a, 0) = (\alpha\beta)(a,b)$ (VERDADERO)

$\underline{g.}\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x\ ,\ \forall x \in V \wedge \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

i) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, b) = (\alpha a + \beta a, b)$

$\quad\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, b) + (\beta a, b) = (\alpha\beta a^2, b^2)$ $\neq$ (FALSO)

ii) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$

$\quad\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha a + \beta b, \alpha b + \beta a)$ $\neq$ (FALSO)

iii) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$

$\quad\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha\beta a^2, \alpha\beta b^2)$ $\neq$ (FALSO)

iv) $(\alpha+\beta)(a,b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$

$\quad\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (0,0)$ $\neq$ (FALSO)

$\quad\alpha(a,b) + \beta(a+b)$

v) ... similar a iii)   (FALSO)

vi) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$

$\quad\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$ $=$ (VERDADERO)

$\underline{h.}\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y\ ,\ \forall x,y \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(ac, bd) = (\alpha ac, bd)$

$\quad\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, b) + (\alpha c, d) = (\alpha^2 ac, bd)$ $\neq$ (FALSO)

ii) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(a+d, b+c) = (\alpha(a+d), \alpha(b+c)) = (\alpha a + \alpha d, \alpha b + \alpha c)$ (VERDADERO)

$\quad\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (\alpha a + \alpha d, \alpha b + \alpha c)$

iii) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(ac, bd) = (\alpha ac, \alpha bd)$

$\quad\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (\alpha^2 ac, \alpha^2 bd)$ $\neq$ (FALSO)

iv) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(0,0) = (0,0)$

$\quad\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (0,0)$ $=$ (VERDADERO)

v) ... similar a iii)   (FALSO)

vi) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(a+c, b+d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d)$ $=$ (VERDADERO)

$\quad\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d)$

Rpta: Sólo vi) es un espacio vectorial ✓

---

2. $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a+6b=0\}$

$(a,b) + (c,d) = (-6b,b) + (-6d,d) = (-6(b+d), b+d)$ [crossed out]

llamamos $e = b+d$ ~~$(-6e,e) \in V$~~ (VERDADERO)

1° Por la operabilidad en $\mathbb{R}^2$ la 1°,2°,5°,6°,7°,8° hipótesis se cumplen

3° $\exists! 0 \in V : x+0=x, \forall x \in V$

$\rightarrow (a,b) + (0_1,0_2) = (a,b)$
$\qquad 0_1 = 0_2 = 0$
$\Rightarrow 0 = (0,0)$

$0 + 6 \cdot 0 = 0$
$\rightarrow 0 \in V$ (VERDADERO)

Además

$(a,b) + (c,d)$
~~es igual~~
$(-6b,b) + (-6d,d)$
$(-6(b+d), b+d)$
$(-6e,e) \in V$

$k(a,b)$
$k(-6b,b)$
$(-k6b, kb)$
$(-6(kb), kb)$
$(-6e,e) \in V$

4° $\forall x \in V, \exists x' \in V : x+x'=0$

$\rightarrow (a,b) + (a',b') = (0,0) \rightarrow (a',b') = (-a,-b)$
$\qquad a' = -a, \; b' = -b$

$(-a) + 6(-b) = 0 \quad \times(-1)$ (VERDADERO)

Rpta: Es espacio vec. $a + 6b = 0 \equiv V$

---

3. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x-y=1\}$

Por la operabilidad en $\mathbb{R}^2$ la 1°,2°,5°,6°,7°,8° hipótesis se cumple

$\rightarrow (x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1, 3x_1-1) + (y_1, 3y_1-1) = (x_1+y_1, 3(x_1+y_1)-2) \notin V$

Rpta: No es espacio vec. ✓

---

4 a) $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = 0 \land x_2 - x_4 = x_3\}$

$\rightarrow 0 = (0,0,0,0) \qquad 0-0=0 \land 0-0=0 \Rightarrow 0 \in S$

$\rightarrow \alpha(x_1,x_2,x_3,x_4) + \beta(y_1,y_2,y_3,y_4) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$

$\alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_4 + \beta y_4) = 0 \quad \land \quad \alpha x_2 + \beta y_2 - (\alpha x_4 + \beta y_4) = \alpha x_3 + \beta y_3$

$\alpha(x_1 - x_4) + \beta(y_1-y_4) = 0 \qquad \alpha(x_2 - x_4) + \beta(y_2-y_4) =$

$\qquad 0 + 0 = 0 \qquad\qquad\qquad \alpha x_3 + \beta y_3 = \alpha x_3 + \beta y_3$

Rpta: S es un subespacio espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. ✓

---

4 b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=3x, \; x=2y\}$

$\rightarrow 0 = (0,0,0) \qquad 0 = 3\cdot0 \land 0 = 2\cdot0 \rightarrow 0 \in M$

$\rightarrow \alpha(x_1,x_2,x_3) + \beta(y_1,y_2,y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$

$\alpha x_3 + \beta y_3 = 3(\alpha x_1 + \beta y_1) \qquad \land \qquad \alpha x_1 + \beta y_1 = 2(\alpha x_2 + \beta y_2)$

$3\alpha x_1 + 3\beta y_1 = 3(\alpha x_1 + \beta y_1) \qquad\qquad 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 = 2(\alpha x_2 + \beta y_2)$

Rpta: M es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

C) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

$\rightarrow 0 = (0,0,0) \qquad 0.0 = 0 \quad \rightarrow 0 \in U$

$\rightarrow d(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$

$\rightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1)(\alpha x_2 + \beta y_2) = 0$

$\alpha^2 x_1 x_2 + \alpha\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \beta^2 y_1 y_2 = 0$

$\alpha\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0 \qquad$ contradicción

RpTa: U no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $\qquad \Lambda$

---

5. I) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{[a \ -a \ a]^T, a \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow 0 = [0;0,0]^T \quad 0 \in \mathbb{R} \quad \rightarrow 0 \in W$

$\rightarrow \alpha \begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b \\ -b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b \\ -\alpha a - \beta b \\ \alpha a + \beta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha a + \beta b) \\ -(\alpha a + \beta b) \\ (\alpha a + \beta b) \end{bmatrix} \in W$

rpTa: W es subesp. vec. de $\mathbb{R}^3$. $\qquad \checkmark$

II) $V = M_3$, $W = \{A \in M_3 : |A| = 0\}$

$\rightarrow A + 0 = A \rightarrow 0 = [0]_{3\times 3} \quad |0| = 0 \rightarrow 0 \in W$

$\rightarrow \alpha A + \beta B = \alpha[a_{ij}]_{3\times 3} + \beta[b_{ij}]_{3\times 3} = [\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}]_{3\times 3} = C \notin W$

$|C| = |\alpha A + \beta B|$ no siempre cumple

rpTa: W no es subespc. vec. de M_3 $\qquad \checkmark$

---

5. Sean $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (2,0,1)$ y $m = (4,-2,5)$, $n = (1,-1,-1)$

Suponemos $m = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ -1 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & -3 & | & -3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4$

$\alpha_2 = 1 \rightarrow \alpha_1 = 2 \qquad \therefore m$ es comb. lin. de v_1 y v_2

Suponemos $n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ -1 & 0 & | & -1 \\ 2 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$

$\alpha_2 = 0 \leftarrow$ Incompatible

$\alpha_2 = 1 \leftarrow$

$\therefore n$ no es comb. lin de v_1 y v_2 $\qquad \checkmark$

7.a) $\{x, 2x-x^2, 6x-2x^2\}$ en P_2

Probamos si son l.i.

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(2x-x^2) + \alpha_3(6x-2x^2) = 0$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x + (-\alpha_2-2\alpha_3)x^2 = 0$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 - (\alpha_2+2\alpha_3)x = 0$$

$\therefore$ __no son l.i.__

$$x = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3}{\alpha_2 + 2\alpha_3} \to \text{si } \alpha_2 \neq 0 \land \alpha_3 \neq 0$$

Probamos sin Genera a P_2

$\to ax^2 + bx + c = \alpha_1(x) + \alpha_2(2x-x^2) + \alpha_3(6x-2x^2)$ m

$ax^2 + bx + c = (-\alpha_2 - 2\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x + 0$

$\to a = -\alpha_2 - 2\alpha_3 \neq 0$

$b = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \Rightarrow$

$c = 0$

$0\cdot\alpha_1 + (-1)\cdot\alpha_2 + (-2)\cdot\alpha_3 = a$

$1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 6\cdot\alpha_3 = b$

$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = \mathbb{C}$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & | & a \\ 1 & 2 & 6 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & | & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & | & b \\ 0 & -1 & -2 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & | & b \\ 0 & 1 & 2 & | & -a \\ 0 & 0 & 0 & | & c \end{bmatrix}$$ el sistema es incompatible $=$ no hay sol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Rpta: $\therefore$ __no es base__

b) $\{1-2x, 3x+x^2-x^3, 1+x^2+2x^3, 3+2x+3x^3\}$ en P_3

Probamos si son L.I.

$$\alpha_1(1-2x) + \alpha_2(3x+x^2-x^3) + \alpha_3(1+x^2+2x^3) + \alpha_4(3+2x+3x^3) = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4) + (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4)x + (\alpha_2+\alpha_3)x^2 + (-\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4)x^3 = 0$$

$1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + 3\cdot\alpha_4 = 0$

$-2\cdot\alpha_1 + 3\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 2\cdot\alpha_4 = 0$

$0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 = 0$

~~$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2$~~

$0\cdot\alpha_1 + (-1)\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3 + 3\cdot\alpha_4 = 0$

$$\xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = 0$

$\alpha_4 = 0$

$\to$ __son L.I.__

Probamos si generan a P_3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha_1(1-2x) + \alpha_2(3x+x^2-x^3) + \alpha_3(1+x^2+2x^3) + \alpha_4(3+2x+3x^3)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (-\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4)x^3 + (\alpha_2+\alpha_3)x^2 + (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4)x + (\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4)$$

la matriz de coeficientes del SEL (igual al de la anterior parte) es $\neq 0$, por lo que el sistema Tiene solución y permite generar a P_3.

$\therefore$ Es base de P_3 ✓

---

8. Si $A = \{u, v, w\} \subset V$, es un conjunto L.I., determinar la D.L. o I.L. de
   $\beta = \{\alpha u + \beta v, \lambda v - \alpha w, \beta w + \lambda v\}$, para $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Queremos probar $b_1(\alpha u + \beta v) + b_2(\lambda v - \alpha w) + b_3(\beta w + \lambda v) = 0 \rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 0$

$\qquad\qquad\qquad$ o

$\rightarrow b_1 \alpha u + (b_1\beta + b_2\lambda + b_3\lambda)v + (b_3\beta - b_2\alpha)w = 0 \qquad\qquad \exists b_i \neq 0, \; i = 1, 2, 3$

$\qquad\qquad\qquad \underset{\approx}{}$

$\qquad a_1 u + a_2 v + a_3 w = 0$

$\qquad b_1 \alpha = 0 \quad \wedge \quad b_1\beta + b_2\lambda + b_3\lambda = 0 \quad \wedge \quad b_3\beta - b_2\alpha = 0$

$(\alpha = 0 \vee b_1 = 0) \wedge \quad \alpha b_1\beta + \alpha b_2\lambda + \alpha b_3\lambda = 0 \qquad \beta b_3 = \alpha b_2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \beta b_3 \lambda + \alpha b_3 \lambda = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \cancel{\alpha\beta = 2\beta}$

$\qquad\qquad\qquad (\lambda b_3 = 0 \vee \alpha + \beta = 0)$

Suponemos $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow b_1 = 0 \qquad$ Si $b_3 = 0 \rightarrow b_2 = 0 \quad \therefore$ Existe el caso donde
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_2 \neq 0 \vee b_3 \neq 0$

$\qquad\qquad$ Si $\alpha = -\beta \rightarrow b_2 + b_3 = 0$

$Rpta:$ Si $\alpha = -\beta$, β es $\cancel{D.\mathcal{U}.}$ L.D.

$\qquad\quad$ Si $\alpha \neq -\beta$, β es L.I. ✓

---

9. Si $B = \{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ es

Probamos
$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot e^x + \alpha_3 \cdot e^{2x} + \alpha_4 \cdot e^{3x} + \alpha_5 \cdot e^{4x} = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$
Suponemos el SE Tiene solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{4x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{4x} \end{vmatrix} \neq 0$$

$e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} \cdot e^{4x} \neq 0 \qquad\qquad \therefore \; \alpha_i = 0, \forall i$, es decir, B es L.I. ✓

$e^{10x} \neq 0$

Se sabe que $e^{10x} > 0$

10. S: $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ es L.I. Determinar la linealidad de

$\quad A = \{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$

Sabemos $\quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$

Probamos $\quad \beta_1 v_1 + \beta_2(v_2 - v_1) + \ldots + \beta_m(v_m - v_1) = 0$

$\quad (\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \ldots - \beta_m) v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m = 0$

$\quad \rightarrow \left(\beta_1 - \sum_{i=2}^{m} \beta_i \right) = 0 \quad \wedge \quad \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_m = 0 \qquad \therefore \beta_i = 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m$

$\quad \beta_1 = \sum_{i=2}^{m} \beta_i = \sum_{i=2}^{m} 0 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ Rpta: A es L.I.

---

11. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vec. y los subespacios W_1 y W_2 demostrar

$\quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

Tenemos $\quad W_1 + W_2 = \{w \in V : w = w_1 + w_2, \ w_1 \in W_1, \ w_2 \in W_2\}$

si Tenemos $\text{gen}(W_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\text{gen}(W_2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y $\text{gen}(W_1 \cap W_2) = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$

y $\alpha \in \mathbb{R}^n \wedge \beta \in \mathbb{R}^m \wedge \theta \in \mathbb{R}^p$

$\quad w = \alpha \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) + \beta \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_m)$

entonces w es una combinación lineal de $n+m$ vectores, mas no sabemos si son L.I.

Digamos que ~~$\{u_1, u_2, \ldots, v_1, \ldots, v_m\}$ genera a $W_1 + W_2$~~ $\Rightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_q\} = \text{gen}(W_1 + W_2)$

$\quad \rightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_q\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ Ya que pueden ser L.I. o no

$\quad \text{gen}(W_1 + W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$.   entonces $q \leq n+m$

$\quad n(\text{gen}(W_1 + W_2)) = n(\text{gen}(W_1)) + n(\text{gen}(W_2)) - n(\text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2)) \quad \ldots (L)$

Ahora Tenemos $\quad W_1 \cap W_2 = \{w \in V : w \in W_1 \wedge w \in W_2\}$ por lo que

$\quad w = \alpha \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \beta \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_m) \rightarrow \alpha \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) - \beta(v_1, v_2, \ldots, v_m) = 0$

Si de esta igualdad extraemos ~~todos~~ algunos α_i o β_i que no son nulos y otros que sí.

Los que ~~no~~ son nulos se recolectan en $\{\theta_i\}_{i=1}^{p}$ y sus respectivos vectores en $\{s_i\}_{i=1}^{p}$

e.g. un $k, j \in [1, p] \cap \mathbb{N} \rightarrow \alpha_j \cdot u_j = \beta_k \cdot v_k \rightarrow \{\alpha_j, \beta_k\} \in \{\theta_i\}_{i=1}^{p} \wedge \{u_j, v_k\} \subset \{s_i\}_{i=1}^{p}$

$\quad$ ~~pero~~ entonces hay algunos ~~$\alpha's$ $\beta's$~~ $u's$ y $v's$ que serán iguales o no

$\quad \rightarrow ~~\{s_i\}~~ \Rightarrow \{s_i\}_{i=1}^{p} = \{u_i\}_{i=1}^{n} \cap \{v_i\}_{i=1}^{m}$

$\qquad\qquad \text{gen}(W_1 \cap W_2) = \text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2)$

Volviendo a $\ldots$ (L)

$\quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - n(\text{gen}(W_1 \cap W_2))$

$\quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

13. Demostrar que $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$, si W_1, W_2 son sub.vec. de V

Retomamos una línea antes de ...(L) en 12.

$$gen(W_1 + W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$$

Tenemos $W_1 \cup W_2 = \{w \in V : w \in W_1 \lor w \in W_2\}$

$$\Rightarrow w = \alpha \cdot u \quad \lor \quad w = \beta \cdot v$$

Tres casos

① $w = \alpha \cdot u$ ② $w = \beta \cdot v$ ③ $w = \alpha \cdot u = \beta \cdot v$

por lo tanto a w lo generan todos los elementos de u y de v, sin embargo

si al momento de evaluar $\alpha \cdot u - \beta \cdot v = 0 \rightarrow \alpha = \beta = 0$ $\quad gen(W_1 \cup W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

$$\land \; gen(W_1) \cap gen(W_2) = \emptyset$$

pero si: $\exists \alpha_i, \beta_j \neq 0, \; i = 1,2,...,n; \; j = 1,2,...,m$ $\quad gen(W_1 \cup W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

$$\land \; gen(W_1) \cap gen(W_2) \neq \emptyset$$

En cualquier caso, $gen(W_1 \cup W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

$$\Rightarrow gen(W_1 + W_2) = gen(W_1 \cup W_2)$$

$$W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$$

---

14. Determine una base para cada subespacio de $\mathbb{R}^4$.

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_1) = x_1(1,1,1,1) \; , \; x_1 \in \mathbb{R}$

$$\therefore F = \langle (1,1,1,1) \rangle$$

$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 \land x_3 = x_4\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0, 0) + (0, 0, x_3, x_3)$
$$= x_1(1,1,0,0) + x_3(0,0,1,1) \; ; \; x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow G = \langle (1,1,0,0); (0,0,1,1) \rangle$$

$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_4) = (x_1, x_1, x_1, 0) + (0,0,0,x_4) = x_1(1,1,1,0) + x_4(0,0,0,1); x_1, x_4 \in \mathbb{R}$

$$\therefore H = \langle (1,1,1,0); (0,0,0,1) \rangle$$

$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4)$

$\therefore k = \langle (-1,1,0,0); (-1,0,1,0); (-1,0,0,1) \rangle \quad = x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$

$$x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

15. Hallar el vector de coordenadas

a. $p(x) = -x + 3x^2$ con respecto a la base $B = \{1+x, 1-2x, x^2\}$ de P_2

$\rightarrow -x + 3x^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-2x) + \alpha_3(x^2)$

$3x^2 - x = \alpha_3 x^2 + (\alpha_1 - 2\alpha_2)x + (\alpha_1 + \alpha_2)$

$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = 3$

$1\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = -1$

$1\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0$

$\sim$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$
$\sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\alpha_2 = \frac{4}{3}$, $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$, $\alpha_3 = 3$ $\therefore [p(x)]_B = (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 3)$

b. $W = [1 \; 6 \; 2]^T$ con respecto a la base $B = \{[1 \; -1 \; 5]^T, [2 \; -1 \; 3]^T, [0 \; 0 \; 2]^T\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\sim$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ +1 & -1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right]$
$\xrightarrow{-2}$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -3 \end{array}\right]$
$\sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 46 \end{array}\right]$
$\begin{array}{l} \alpha_1 = -13 \\ \alpha_2 = 7 \\ \alpha_3 = 23 \end{array}$
$\therefore [W]_B = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 23 \end{bmatrix} = (-13, 7, 23)$

16. Determinar si B es una base del espacio vectorial V.

a. $B = \{x, 1+x, 1-x, x^2+x+1\}$, $V = P_2$

Comprobamos si los elementos de B son L.I.

$\alpha_1(x) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1-x) + \alpha_4(x^2-x+1) = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$

$\alpha_4 x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)x + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$

$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 1\cdot\alpha_4 = 0$

$1\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 + 1\cdot\alpha_4 = 0$

$0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + 1\cdot\alpha_4 = 0$
$\sim$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\sim$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$
$\sim$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$
$\begin{array}{l} \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}$
$\begin{array}{l} 2\alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \end{array}$

$\therefore B$ no es L.I., luego, no es base de P_2

b. $B = \{1-x, 1-x^2, x-x^2\}$, $V = P_2$

Comprobamos si los elementos de B son L.I.

$\alpha_1(1-x) + \alpha_2(1-x^2) + \alpha_3(x-x^2) = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$(-\alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2) = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$

$0 \cdot \alpha_1 - 1 \cdot \alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 0$

$-1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$

$1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$

$$\begin{array}{|ccc|c|} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ +1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{|ccc|c|} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{|ccc|c|} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

El SEL no Tiene solución.

$\rightarrow \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\therefore$ B no es base de P_2

C.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad V = gen\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

dada a similitud de bases y el conjunto generador de V, bastaría probar

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{|cc|c|} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{|cc|c|} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{|cc|c|} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\alpha_2 = 1 \wedge \alpha_1 = 1$ por lo tanto

$$V = gen\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = gen(B)$$

Rpta: B es base de V

17. S. $A = \{(1,1,2,1) ; (-1,2,0,1) ; (5,-1,6,1)\} \in \mathbb{R}^4$, determine una base para $gen(A)$.

$gen(A)$ es el conjunto de $g \in \mathbb{R}^4$ Tal que

$g = \alpha_1 (1,1,2,1) + \alpha_2 (-1,2,0,1) + \alpha_3 (5,-1,6,1)$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

Probamos su linealidad

$$\begin{array}{|ccc|c|} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ -1 & 2 & -1 & g_2 \\ -2 & 2 & 0 & g_3 \\ -1 & 1 & 1 & g_4 \end{array} \sim \begin{array}{|ccc|c|} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 3 & -6 & g_2 - g_1 \\ 0 & 2 & -4 & g_3 - 2g_1 \\ 0 & 2 & -4 & g_4 - g_1 \end{array} \sim \begin{array}{|ccc|c|} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3}(g_2 - g_1) \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}(g_3 - 2g_1) \\ 0 & 0 & 0 & g_4 + g_1 - g_3 \end{array} \sim \begin{array}{|ccc|c|} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3}(g_2 - g_1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{3}g_2 - \frac{4}{3}g_1 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 + g_1 - 2g_3 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{|ccc|c|} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3}(g_2 - g_1) \\ 0 & 0 & 0 & 3g_3 - 2g_2 - 8g_1 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 + g_1 - 2g_3 \end{array}$$

Obtenemos que $3g_3 = 2g_2 + 8g_1$ y $g_4 + g_1 = 2g_3$

$\rightarrow (g_1, g_2, g_3, g_4) = (g_1, 3g_3 - 8g_1, 2g_3, 4g_3 - 2g_1)$

$= (g_1, -8g_1, 0, -2g_1) + (0, 3g_3, 2g_3, 4g_3)$

$= g_1(2, -8, 0, -2) + g_3(0, 3, 2, 4)$

$= 2g_1(1, -4, 0, -1) + g_3(0, 3, 2, 4)$

$\therefore A = \langle (1, -4, 0, -1) ; (0, 3, 2, 4) \rangle$

8. Describe el espacio determine generado por los conjuntos, determine su dimensión y proporcione dos bases para cada uno de ellos.

a. $A = \{(2,0,1,-1); (1,-1,0,1); (0,0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Sea $V_1 = gen(A)$, para todo $v \in V_1$ se tiene que

$$v = d_1(1,0,1,-1) + d_2(1,-1,0,1) + d_3(0,0,0,0)$$

$$
\begin{array}{|ccc|c|}
1 & 1 & 0 & V_1 \\
0 & -1 & 0 & V_2 \\
1 & 0 & 0 & V_3 \\
-1 & 1 & 0 & V_4
\end{array}
\sim
\begin{array}{|ccc|c|}
1 & 1 & 0 & V_1 \\
0 & -1 & 0 & V_2 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & V_3-V_1 \\
+2 & 0 & 2 & 0 & V_4+V_1
\end{array}
\sim
\begin{array}{|ccc|c|}
-1 & 1 & 1 & 0 & V_1 \\
0 & 1 & 0 & -V_2 \\
0 & 0 & 0 & V_3+V_1-V_2 \\
0 & 0 & 0 & V_4+V_1+2V_2
\end{array}
\sim
\begin{array}{|ccc|c|}
1 & 0 & 0 & V_1+V_2 \\
0 & 1 & 0 & -V_2 \\
0 & 0 & 0 & V_3+V_1-V_2 \\
0 & 0 & 0 & V_4+V_1+2V_2
\end{array}
$$

Tenemos que $V_3 = V_1 + V_2$ y $V_1 + 2V_2 + V_4 = 0$

$\therefore gen(A) = \{(V_1, V_2, V_3, V_4) : V_1 + V_2 = V_3 \wedge V_1 + 2V_2 + V_4 = 0\}$

$(V_1, V_2, V_3, V_4) = (V_1, V_2, V_1+V_2, -V_1-2V_2) = (V_1, 0, V_1, -V_1) + (0, V_2, V_2, -2V_2)$

$\qquad = V_1(1,0,1,-1) + V_2(0,1,1,-2)$

$gen(A) = \langle (1,0,1,-1); (0,1,1,-2)\rangle$

$\dim(gen(A)) = 2$

$gen(A) = \langle (1,0,1,-1); (0,1,1,-2)\rangle = \langle(-1,0,-1,1); (0,-1,-1,2)\rangle$

b. $B = \{1+x; x^3 - x^2\} \subseteq P_3$

Sea $gen(B)$ el esp. vec. generado por B, para todo $p \in gen(B)$ se tiene que

$$p = d_1(1+x) + d_2(x^3 - x^2)$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (d_2)x^3 + (-d_2)x^2 + (d_1)x + d_1$$

$\rightarrow a_3 = d_2$
$a_2 = -d_2$
$a_1 = d_1$
$a_0 = d_1$

$\rightarrow$
$a_3 = -a_2$
$a_1 = a_0$

$gen(B) = \{p \in P_3 : p = ax^3 - ax^2 + bx + b ; a,b \in \mathbb{R}\}$

Probamos la linealidad de B

$d_1(1+x) + d_2(x^3 - x^2) = 0 \rightarrow d_2 = d = 0$

$d_2 x^3 - d_2 x^2 + d_1 x + d_1 = 0$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\sim
\begin{array}{c}
\rightarrow \\
+1
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\rightarrow d_1 = d_2 = 0
$$

$\therefore B$ es L.I.

B es base de $gen(B)$

$\therefore \dim(gen(B)) = 2$

$gen(B) = \langle x^3 - x^2; 1+x \rangle = \langle x^2 - x^3; -1-x\rangle$

19. En $\mathbb{R}^3$ sobre los $\mathbb{R}$ dados los subespacios:

$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ y $W_2 = \langle (2, -1, 1); (1, 2, 3) \rangle$

Determinar

i) $W_1 + W_2$

$W_1 + W_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = w_1 + w_2 ; w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}$

En W_1, $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2) = (x_1, 0, x_1) + (0, x_2, 2x_2)$

$\qquad = x_1 (1, 0, 1) + x_2 (0, 1, 2)$

$\therefore W_1 = \alpha_1 (1, 0, 1) + \alpha_2 (0, 1, 2) ; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

En W_2, $w_2 = \beta_1 (2, -1, 1) + \beta_2 (1, 2, 3) ; \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow w = \alpha_1 (1, 0, 1) + \alpha_2 (0, 1, 2) + \beta_1 (2, -1, 1) + \beta_2 (1, 2, 3)$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \sim \rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - w_1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - w_1 - 2w_2 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 - w_1 - w_2 \\ w_3 - w_1 - 2w_2 \end{bmatrix}
$$

la máxima dimensión de $W_1 + W_2$ es 3, por lo que algun vector debe ser c.l. de los demás

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow$

el cuarto vector es c.l. de los demás ∴

$w = \alpha_1 (1, 0, 1) + \alpha_2 (0, 1, 2) + \beta_1 (2, -1, 1)$

$\therefore W_1 + W_2 = \langle (1, 0, 1) ; (0, 1, 2) ; (2, -1, 1) \rangle$

ii) $W_1 \cap W_2$

$W_1 \cap W_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w \in W_1 \wedge w \in W_2\}$

de ... i) Tenemos que

$\qquad w = \alpha_1 (1, 0, 1) + \alpha_2 (0, 1, 2) = \beta_1 (2, -1, 1) + \beta_2 (1, 2, 3)$

$\rightarrow \alpha_1 (1, 0, 1) + \alpha_2 (0, 1, 2) + \beta_1 (-2, 1, -1) + \beta_2 (-1, -2, -3) = 0$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Sin embargo, sabemos que el 4to vector es c.l. de los 3 primeros.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim +1
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$
$\qquad -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$

es decir son L.I. por lo que

De ... ii) obtenemos que

$\qquad (1, 2, 3) = \theta_1 (1, 0, 1) + \theta_2 (0, 1, 2) + \theta_3 (2, -1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \theta_1 \\ 0 & 1 & -1 & \theta_2 \\ 1 & 2 & 1 & \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \sim \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ +1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \rightarrow & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \theta_1 = 5, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = -2$

$\therefore (1,2,3) = 5.(1,0,1) - 2.(2,-1,1)$

Reemplazamos

$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,2) = \beta_1(2,-1,1) + \beta_2(5.(1,0,1) - 2.(2,-1,1))$

$(\alpha_1 - 5\beta_2).(1,0,1) + \alpha_2(0,1,2) = (\beta_1 - 2\beta_2).(2,-1,1)$

$(\alpha_1 - 5\beta_2).(1,0,1) + \alpha_2.(0,1,2) + (2\beta_2 - \beta_1).(2,-1,1) = 0$

dado que son L.J.

$\alpha_1 = 5\beta_2, \quad \alpha_2 = 0, \quad 2\beta_2 = \beta_1$

$\rightarrow \beta_2 \in (-\infty, \infty) \wedge \alpha_2 = 0 \sim 2\alpha_1 = 5\beta_1 = 10\beta_2$

$\alpha_1(1,0,1) = \alpha_1(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) + \beta_2(1,2,3)$

$\alpha_1(1,0,1) = \alpha_1(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) + \alpha_1(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

$\alpha_1(1,0,1) = \alpha_1(1,0,1)$

$\boxed{} \rightarrow w = \alpha_1(1,0,1)$

$\therefore W_1 \cap W_2 = \langle (1,0,1) \rangle \quad \Leftarrow$

iii) Por ...(i) sabemos que $W_1 + W_2 = \langle (1,0,1); (0,1,2); (2,-1,1) \rangle$

$\rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3$

iv) Por ...(ii) sabemos que $W_1 \cap W_2 = \langle (1,0,1) \rangle$

$\rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1 \quad \Leftarrow$

20 En $\mathbb{R}^3$, sea W el subespacio generado por $A = \{(1,2,-2); (5,4,-4); (0,1,-1)\}$

Determinar:

i) Una base de W y $\dim(W)$

$W = gen(A) = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = \alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4) + \alpha_3(0,1,-1); \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

Probamos la linealidad de A

$\alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4) + \alpha_3(0,1,-1) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & \alpha_1 \\ 2 & 4 & 1 & \alpha_2 \\ -2 & -4 & -1 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ +1 & -2 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (-\frac{1}{6}) & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Son L.D. por lo tanto eliminaremos alguno

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

El Tercer vector es L.D. de los otros dos, por lo tanto

$W = d_1(1,2,-2) + d_2(5,4,-4)$ los vectores son L.I. y generan a W

$\therefore W = \langle (1,2,-2) ; (5,4,-4) \rangle$ y $dim(W) = 2$ ✓

---

ii) Extender la base de W a una base de $\mathbb{R}^3$

queremos un $A = \{(1,2,2)(5,4,-4) ; (e_1,e_2,e_3)\}$ Tal que sean L.I. y $\mathbb{R}^3 = sen(A)$.

primero la Independencia lineal

$d_1(1,2,-2) + d_2(5,4,-4) + d_3(e_1,e_2,e_3) = 0$

1	5	e_1	d_1		0		1	5	e_1	0		1	5	e_1	0		1	5	e_1	0
2	4	e_2	d_2	=	0	$\sim$	2	4	e_2	0	$\sim$ -2	2	4	e_2	0	$\sim (-\tfrac{1}{6})$	0	-6	e_2-2e_1	0
-2	-4	e_3	d_3		0	+1	-2	-4	e_3	0		0	0	e_2+e_3	0		0	0	e_2+e_3	0

				1	5	e_1	0		1	5	e_1	
				0	1	$\frac{1}{6}(e_2-2e_1)$	0		0	1	$\frac{1}{6}(2e_1-e_2)$	$\neq 0$ para que el S.B.L
				0	0	e_2+e_3	0		0	0	e_2+e_3		Tenga sol. única.

$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{6}e_2 \\ 0 & e_2+e_3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow (e_2+e_3) \neq 0$

$e_2 \neq -e_3$ para que A sea L.I.

luego Tenemos que $\mathbb{R}^3 = sen(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x = d_1(1,2,-2) + d_2(5,4,-4) + d_3(e_1,e_2,e_3) ; d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \}$

Elegimos $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$

$\therefore A = \{(1,2,-2); (5,4,-4); (1,1,0)\}$ es L.I. y genera a $\mathbb{R}^3$ pues $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sin restricción

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,2,-2) ; (5,4,-4) ; (1,1,0) \rangle$$ ✓

---

21. Sea $V = \{A / A_{n \times n}\}$ y los subespacios $W = \{A \in V / A = A^T\}$ y $W_2 = \{A \in V / A^T = -A\}$, demostrar que

i) W_1 y W_2 son subespacios

V es un espacio vectorial, las propiedades de pertenencia y operacionales se heredan a sus subconjuntos

$\rightarrow$ Para W ser subespacio ~~debemos comprobar~~ s: $\forall w_1, w_2 \in W : w = d_1 w_1 + d_2 w_2 \in W , d_i \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \exists 0 \in W : \forall w \in W , w + 0 = w$.

$\rightarrow$ en W_1, supongamos $0 \in W$ e igual a $0 = [0_{ij}]_{n \times n}$

$\rightarrow A + 0 = A$

$[a_{ij}]_{n \times n} + [0_{ij}]_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n} \rightarrow 0_{ij} = 0 \; \forall i,j$

$\therefore 0 = [0]_{n \times n} \in W_1$ pues $[0]_{n \times n} = [0]^T_{n \times n}$, cumple la primera condición

Sea $A, B \in W_1$, $K \in \mathbb{R}$, entonces $C \in W_1$ tal que

$$C = KA + B$$

Transponemos C

$$C^T = KA^T + B = KA + B = C$$
$$C^T = C \quad \therefore C \in W_1$$

$\therefore W_1$ es un subespacio vectorial de V ✓

en W_2, sea $0 = [0_{ij}]_{n \times n}$ y $A \in W_2$

$\qquad A + 0 = A$

$\qquad [a_{ij}]_{n \times n} + [0_{ij}]_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n} \rightarrow 0_{ij} = 0 , \forall i,j$

$\rightarrow 0 = [0]_{n \times n}$ y $0^T = -0$ por lo que $0 \in W_2$, cumple la 1ra condición.

Sea $A, B \in W_2$, $K \in \mathbb{R}$, un $C \in V$ tal que
$$C = kA + B$$

Trasponemos

$$C^T = kA^T + B^T = K(-A) + (-B) = -kA - B = -(kA + B)$$
$$C^T = -C \rightarrow C \in W_2$$

$\therefore$ W_2 es un subespacio vectorial de V

ii) $W_1 \oplus W_2$ ($W_1 + W_2$ es una suma directa $\Leftrightarrow$ dim $(W_1 \cap W_2) = 0$}

Si $W_1 + W_2$ es una suma directa, entonces dim$(W_1 \cap W_2)$

$W_1 \cap W_2 = \{ w \in W : w \in W_1 \land w \in W_2 \}$

~~Sea ver ∈ W₂ que~~ Supongamos $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, entonces un $C \in W_1 \cap W_2$ cumple

$$C \in W_1 \quad \land \quad C \in W_2$$
$$\rightarrow C = C^T \quad \land \quad C^T = -C$$
$$\rightarrow C = -C$$
$$2C = 0$$
$$C = 0 \quad \text{el único elemento de } W_1 \cap W_2 \text{ es } 0.$$

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$, la dimensión de un conjunto unitario es 0.

$\rightarrow$ dim $(W_1 \cap W_2) = 0$

$\therefore W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

23. Demostrar que:

a. $\langle (1,3,5) \rangle = \langle (3,6,10) \rangle$

Sean los ~~subespacios~~ conjuntos $A = \{(1,3,5)\}$ y $B = \{(3,6,10)\}$ y los subespacios gen(A) y gen(B).

$\rightarrow$ gen$(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha(1,3,5), \alpha \in \mathbb{R}\}$ y gen$(B) = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta(3,6,10), \beta \in \mathbb{R}\}$

$$y = (2\beta)(1,3,5)$$
$$2\beta \text{ sigue siendo } \mathbb{R}$$

$\forall x \in$ gen(A) $\land$ $y \in$ gen(B) : $x = \alpha(1,3,5) = y = (2\beta)(1,3,5)$

$$x = y \quad \text{pues solo es necesario que } \alpha = 2\beta$$

$\rightarrow$ gen(A) = gen(B)

$\langle (1,3,5) \rangle = \langle (3,6,10) \rangle$

b. $\langle (2,-1,6) ; (-3,4,1) \rangle = \langle (-1,3,7) ; (8,-4,24) \rangle$

Sean $A = \{(2,-1,6); (-3,4,1)\}$, $B = \{(-1,3,7); (8,-4,24)\}$ y gen(A), gen(B) sus subespacios.

gen$(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1(2,-1,6) + \alpha_2(-3,4,1) = x ; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, gen$(B) = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta_1(-1,3,7) + \beta_2(8,-4,24)\}$

En gen(B),

$$y = \beta_1(-1,3,7) + 4\beta_2(2,-1,6)$$
$$y = \beta_1(-1,3,7) + (4\beta_2 + \beta_1)(2,-1,6) - \beta_1(2,-1,6)$$
$$y = \beta_1(-3,4,1) + (4\beta_2 + \beta_1)(2,-1,6)$$
$$x = \alpha_1(2,-1,6) + \alpha_2(-3,4,1)$$

Haciendo $\alpha_2 = \beta_1$ $\land$ $\alpha_1 = 4\beta_2 + \beta_1$ por lo tanto habrán x e y iguales $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ gen(A) = gen(B) $\Leftrightarrow$ $\langle (2,-1,6); (-3,4,1) \rangle = \langle (-1,3,7); (8,-4,24) \rangle$

23) Determinar qué vectores pertenecen al subespacio de P_3 generado por $S = \{x^3+2x^2+1, x^2-2, x^3+x\}$

I. $p(x) = 3 - x + x^2$

Verificamos si $x^2 - x + 3 = \alpha_1(x^3+2x^2+1) + \alpha_2(x^2-2) + \alpha_3(x^3+x)$

$x^2 - x + 3 = (\alpha_1+\alpha_3)x^3 + (2\alpha_1+\alpha_2)x^2 + \alpha_3 x + (\alpha_1 - 2\alpha_2)$

$\rightarrow$
$1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = 0$
$2\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 1$
$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = -1$
$1\cdot\alpha_1 - 2\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 3$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\sim$
$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
$\sim$
$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\sim$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

$\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1$

$\alpha_2 - 2\alpha_3 = 1 \rightarrow \alpha_2 = -1$

$\alpha_3 = -1$

$\therefore$ $p(x)$ sí pertenece a S ✓

II, III, IV se hacen de la misma forma, si no hay solución no pertenece

(cuando hay infinitas soluciones sí pertenece).

24) Suponga que $B = \{v, w\}$ es una base de V. ¿Cuál es una base también?

a). $\{v+w, v\}$

Sabemos que B es L.I. y $V = \text{gen}(B)$, es decir

$\alpha_1 v + \alpha_2 w = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $\land$ $\forall x \in V: x = \alpha_1 v + \alpha_2 w$

evaluamos la L.I. del conjunto

$\beta_1(v+w) + \beta_2 v = 0$

$(\beta_1 + \beta_2)v + \beta_1 w = 0 \rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 0 \land \beta_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$, es decir es L.I

Luego tenemos un $x \in V$, que $x = \alpha_1 v + \alpha_2 w$; $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

queremos probar que $x = \beta_1(v+w) + \beta_2(v) = \alpha_1 v + \alpha_2 w$

$\rightarrow \beta_1(v+w) + \beta_2 v - \alpha_1 v - \alpha_2 w = 0$

$(\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1)v + (\beta_1 - \alpha_2)w = 0 \rightarrow \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \land \alpha_2 = \beta_2$

es decir $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ existen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que las comb. lin. de $\{v,w\}$ y $\{v+w, v\}$ sean

iguales, por lo tanto

$\{v+w, v\}$ es una base de V ✓

b), c) se hacen de la misma forma, si no son L.I. no es base o si no se puede

expresar cualquier comb. lin. de $\{v,w\}$ como la comb. lin. del conjunto dado. Tampoco es base.

25. Sea $V = \mathbb{R}^4$, y los subespacios

$W_1 = \{m \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_4 \land x_1 + 2x_4 = x_3\}$ y $W_2 = \{m \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4\}$

Determina una base para $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ y su dimensión

El procedimiento es igual al problema 19.